CONCURSUL JUDEȚEAN
"Trepte în matematică și comunicare" Memorial FLORIAN PANĂ
Ediția a XX-a, 16 mai 2026
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE_____Clasa a X-a (M_1 Mate-info)

Subiectul I (20p)

Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3^{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} = -x^2+2x+2$

b) $(2+\cos x)^{\sqrt{x-3}} + (2-\sin x)^{\sqrt{x^2-x-6}} = 2$

c) $2(x-3)^{\log_5(x+2)} + 3(x+2)^{\log_5(x-3)} - 20 = 5x(x+4)$

Soluție

a) $x \in [1,\infty)$ 1p

$-x^2+2x+2>0 \Leftrightarrow |x-1|<\sqrt{3}$ 2p

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1}+1$ 2p

Cu notatia $x-1=u^2 \Rightarrow 3^{u+1} = 3-u^4$ 1p

Soluție unică $u=0$ deci $x=1$ 1p

b) Domeniul de existență al expresiei $D=[3,\infty)$ 1p

$2+\cos x \geq 1$ și $2-\sin x \geq 1$ pt orice $x \in D$ 2p

$\sqrt{x-3} \geq 0$ și $\sqrt{x^2-x-6} \geq 0$ pt orice $x \in D$.....2p

Egalitatea are loc pentru $x=3$ 1p

c) $x>3$ și $x=4$ nu convine.....1p

Folosim $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ și ecuația devine: $(x-3)^{\log_5(x+2)} = (x+2)^2$ 2p

Se logaritmeaza in baza 5 $\Rightarrow \log_5(x+2)\left[\log_5(x-3)-2\right]=0$ 2p

Soluția care convine $x=28$ 2p

Subiectul al II-lea (25p)

1. Să se arate că pentru $n>k\geq 1$ numărul $\sqrt{\frac{n+k}{n-k}\cdot\left(C_{n-1}^{k}\right)^2+\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2}$ este natural.

Soluție:

$C_{n-1}^{k} = \frac{n-k}{n}\cdot C_n^k$ 4p

$C_{n-1}^{k-1} = \frac{k}{n}\cdot C_n^k$ 4p

$\sqrt{\frac{n+k}{n-k}\cdot\left(C_{n-1}^{k}\right)^2+\left(C_{n-1}^{k-1}\right)^2} = C_n^k \in \mathbb{N}$ 2p

2. Fie numărul complex $z=1+2i$.

a. Arătați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ numărul $z^n = a_n + ib_n,\ a_n, b_n \in \mathbb{Z}$

b. Arătați că are loc relația $b_{n+2}-2b_{n+1}+5b_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție.

a) Dezvoltare folosind binomul lui Newton ……..... 3 p

Puterile numărului i sunt $\{-1,1,-i,i\}$ ……..... 3 p

Finalizare ……..…… 1 p

b) $b_1=2, b_2=4, b_3=-2$ ……. 2 p

Verificarea relației de recurență ……..… 1 p

Inducție matematică

$z^{n+1} = a_{n+1}+ib_{n+1},\quad a_{n+1} = a_1\cdot a_n - b_1\cdot b_n$.și $b_{n+1} = b_1\cdot a_n - a_1\cdot b_n$.....2p

$b_{n+2} = 2a_1\cdot b_{n+1} - (a_1^2+b_1^2)\cdot b_n,\ a_1=1,\ b_1=2,$.....2p

$b_{n+2}-2b_{n+1}+5b_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. 1p